Теорема. Множество всех действительных чисел несчетно.

Начало доказательства: допустим, что множество действительных чисел отрезка [0,1] счетно. Тогда все эти числа можно занумеровать натуральными числами: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Покроем каждую точку a_i интервалом G_i длины 10^{-i}.

Дальше нужно решить задачи с 4 по 7:

Задача 4. Доказать, что при любом n объединение $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$ не покрывает отрезка [0,1].

Выберем какую-нибудь точку, не покрытую этими интервалами, и обозначим ее через B_n.

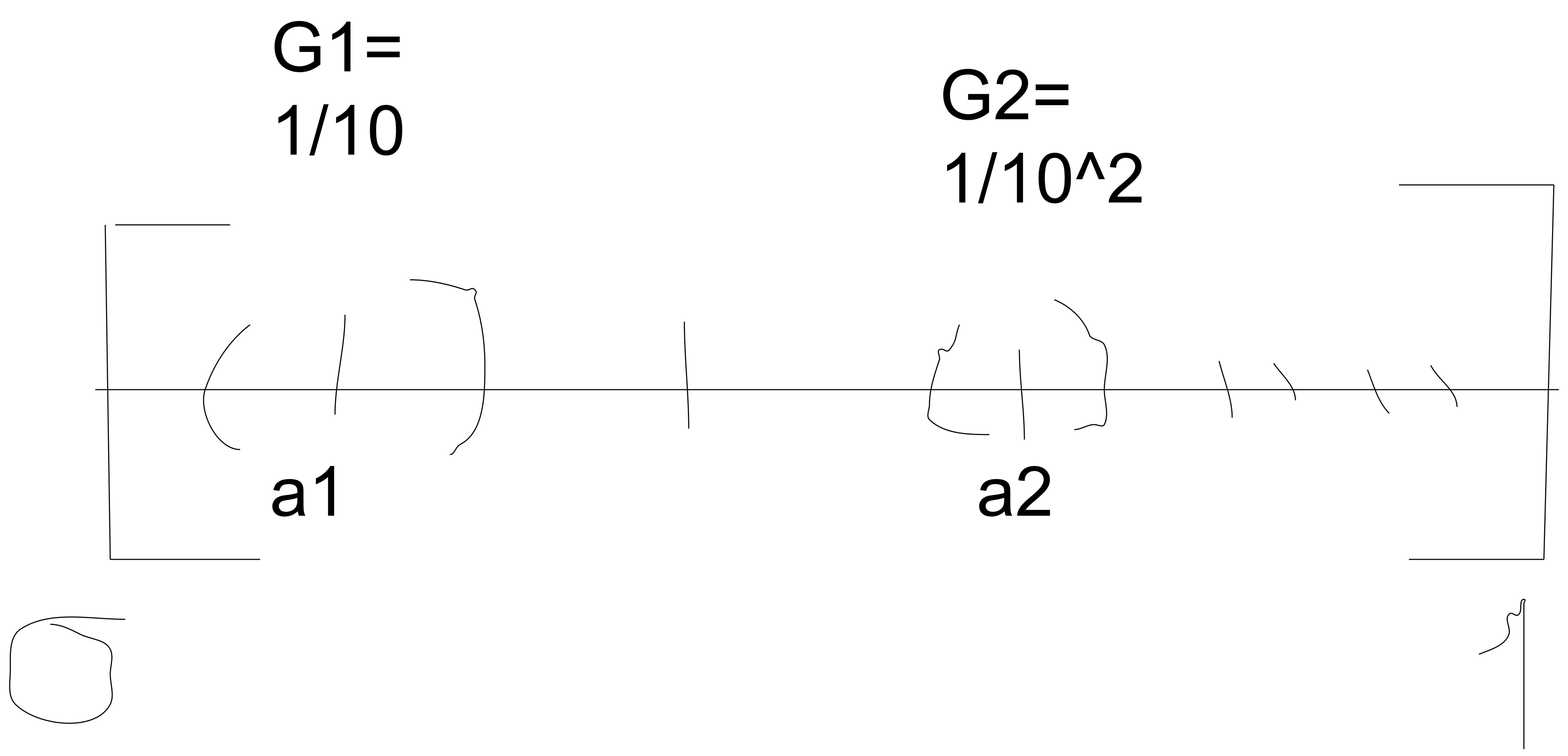
по Т о пр точке мн-ва на отрезке

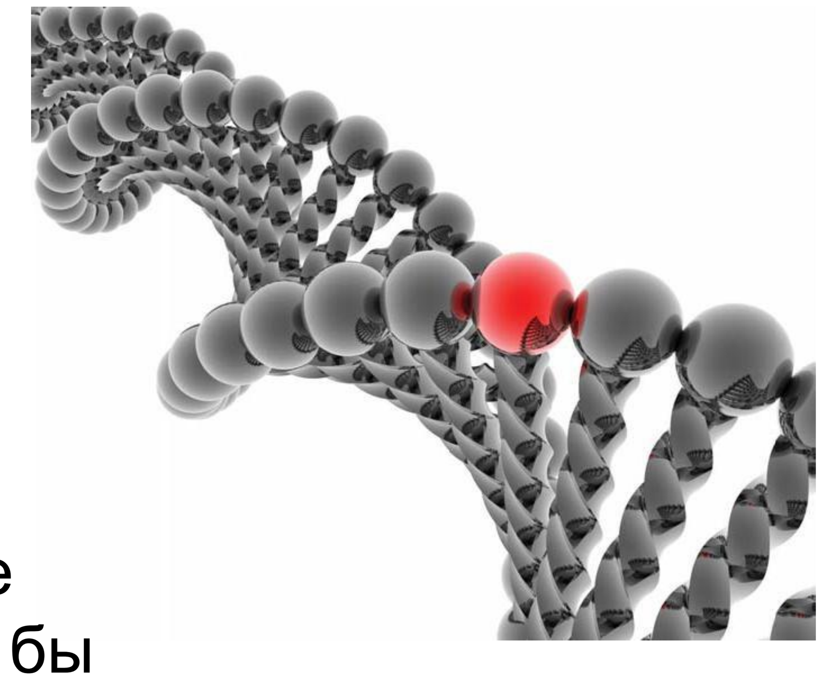
Задача 5. Доказать, что найдется точка, предельная для множества точек B_n (обозначим эту точку через C).

Задача 6. Найдите противоречие в том факте, что точка C покрыта некоторым интервалом G_k.

Задача 7. Это противоречие доказывает, что множество точек отрезка не может быть счетным. Выведите из этого, что и множество всех действительных чисел несчетно.

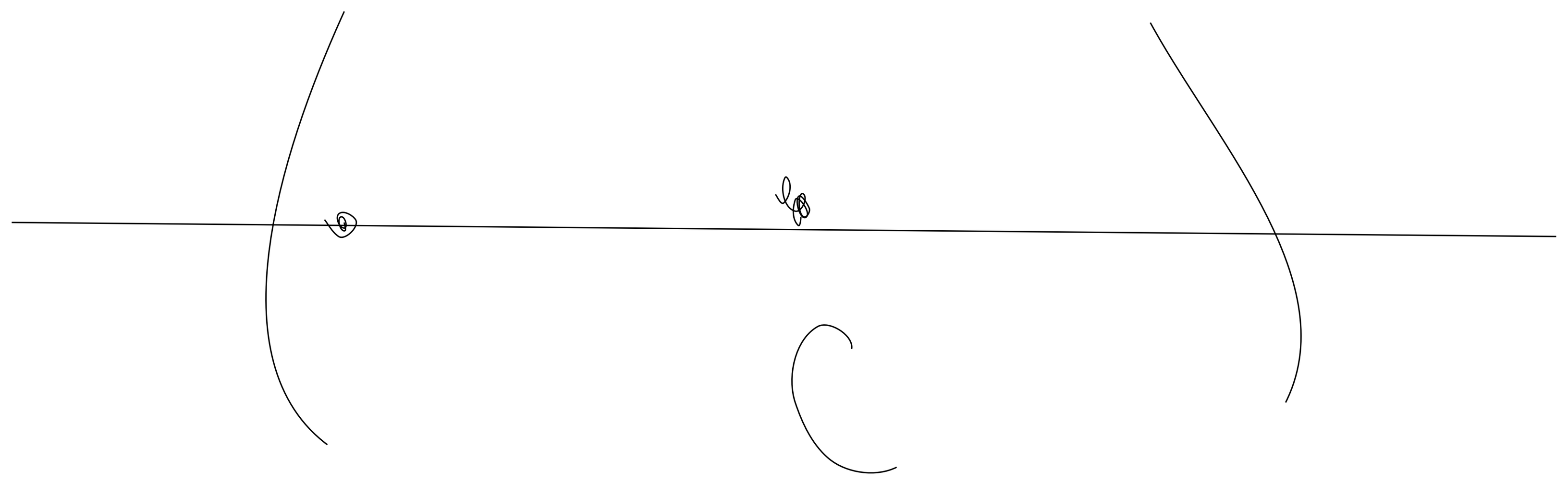
4) 1/10+1/100+1/1000+...=0,111...<2/10<1





5) По теореме Больцано и Вейерштрасс любое бесконечное множество на отрезке имеет хотя бы одну предельную точку, значит множество B1...Bn… будут иметь на отрезке отрезке хотя бы одну предельную точку С.

6) От противного
Пусть точка С покрыта интервалом Gk, тогда так как С предельна для множества В в любой ее окрестности найдется хотя бы одна точка множества В (а значит в любой ее окрестности найдется бесконечно много точек множества В). Значит и в интервале Gk тоже найдется точка из множества В.
Точка Bk точно не может попасть в Gk по определению точки Bk. Что верно для точек В с номерами больше k?
Рассмотрим точку Bk+1. По определению Bk+1 это такая точка, которая не попадает во все интервалы Gk+1, из этого следует, что Bk+1 в Gk тоже не попадает. Значит все точки В с номерами больше k не попадают в Gk. А значит в Gk попадут только точки В с номерами меньшими k, что вызывает противоречие, так как в Gk должно быть бесконечно много точек В.
Точка С не покрыта никаким Gk.



7) Все точки должны быть покрыты каким-то G в том числе точка С, так как она точка отрезка, но в выше написанном доказано, что она не покрыта Gk, что вызывает противоречие.
Из этого противоречия следует, что множество точек 0...1 не счетно.